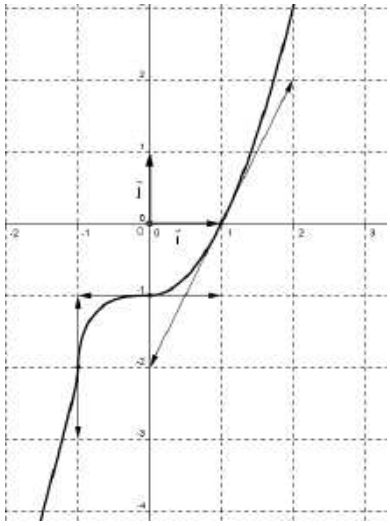
N°07 Fonctions réciproques

www.TakiAcademy.com

EXERCICE N°1 : 3 points 15 '

Le graphique ci-dessous, représente une fonction f définie sur dans un repère orthonormé.



1)a) f est-elle dérivable en (-1)?

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)+2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)+2}{x+1}$.

2) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera

3)a) Montrer que f^{-1} est dérivable en (-2).

b) f^{-1} est-elle dérivable en (-1)? Pourquoi ?

c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}

d) Calculer $(f^{-1})'(-2)$; $(f^{-1})'(0)$.

EXERCICE N° 2 : 4 points 15 '

1/a- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \text{tg}x$ réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur IR^+

b- Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR^+ et que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2/ Soit la fonction $F : x \mapsto f^{-1}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) + f^{-1}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)$; $\forall x \in IR^+$

a- Montrer que F est dérivable sur IR^+ et déterminer $F'(x)$.

b- En déduire que $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE N° 3 : 6 points 30 '

I/ Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{|x^2-4|}$.

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2.
Interpréter géométriquement les résultats trouvés.

2/a- Justifier la dérivabilité de f sur $[0;+\infty[\setminus\{2\}$. **b**- Dresser le tableau de variation de f.

3/a- Prouver que f est bijective de $[2;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J. **c**- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II/ Soit $h : \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\to IR; x \mapsto \tan x$.

1/ Montrer que h réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0;+\infty[$.

2/ On note $H = h^{-1}$. Montrer que H est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $H'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}; \forall x \in [0;+\infty[$.

3/ Soit Ψ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\Psi(x) = H[f(x)+1] + H\left[\dfrac{1}{f(x)+1}\right]; \forall x \in IR^+$

a- Calculer $\lim_{x\to+\infty} \Psi(x)$.

b- Justifier que Ψ est dérivable sur $IR^+\backslash\{2\}$.

c- Montrer que $\Psi'(x) = 0; \forall x \in IR^+\backslash\{2\}$.

d- Calculer enfin $\Psi(x); \forall x \in IR^+\backslash\{2\}$

EXERCICE N° 4 : 6 points 30 '

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

1/**a**) Montrer que $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ $f'(x) = \frac{1}{2}(f(x))^3 \sin(x)$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[1 ,+\infty[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

d) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et donner $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1 ,+\infty[$ et déduire que $\forall x\in 1 ,+\infty[$

$(f^{-1})' (x)=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$.

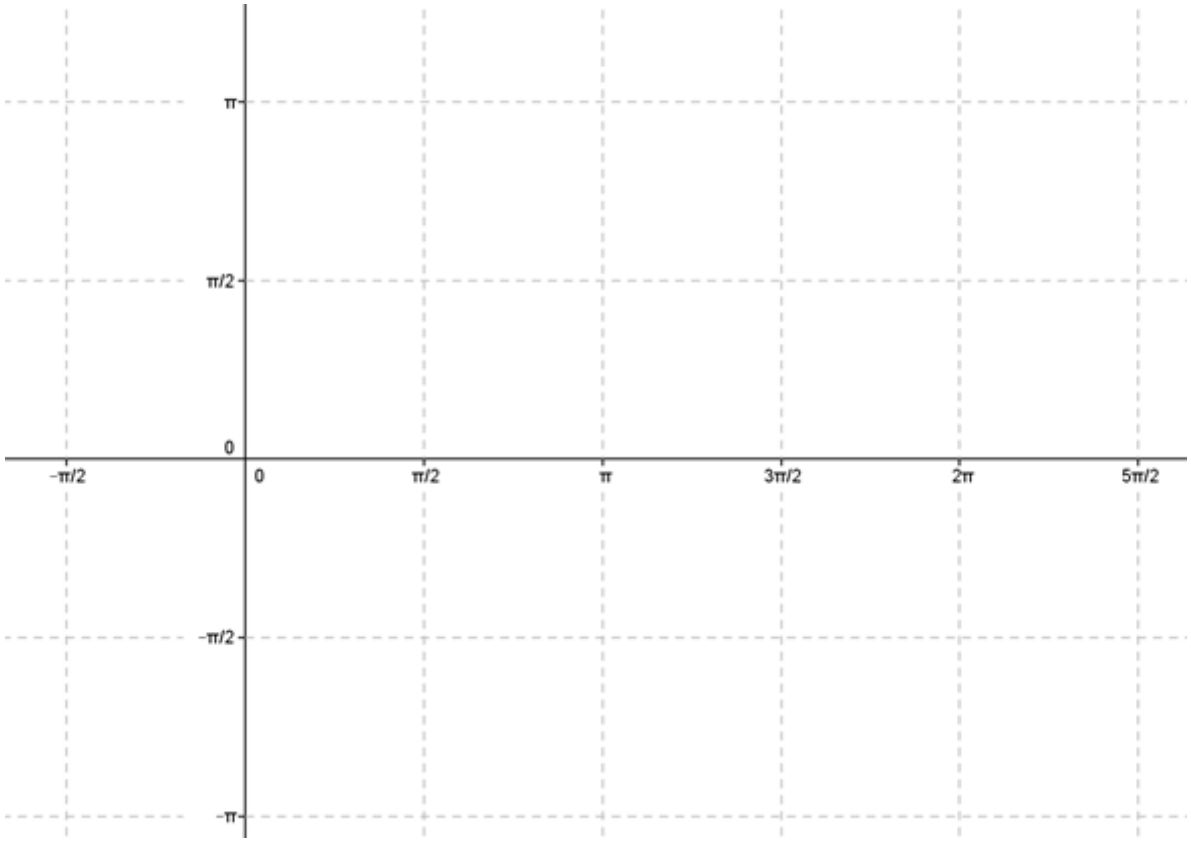
3/ Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty [$ par : $g(x)=f^{-1} (\sqrt{1+\frac{1}{x}})$ si $x\in]0 ,+\infty[$ et $g(0)=\frac{\pi}{2}$.

a) Montre que g est continue sur $[0,+\infty[$

b) Montrer que g est dérivable sur $]0 ,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0 ,+\infty[$ $g' (x)=\frac{-1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

4/**a**) Soit $x \in]0 ,+\infty[$. Montrer que pour tout $t \in]0 ,x [$ $,-1\leq g'(t) \leq g'(x)$.

b) En déduire que $\forall x\in]0 ,+\infty[: -x \leq g(x) - g(0) \leq \frac{-x}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

c) Montrer alors que g est dérivable à droite en 0.

5) Donner une équation de la tangente à Cg au point d'abscisse 0 puis tracer Cg dans le Repère ci-dessous